



Matematiikan oppiminen:

Lukujen ymmärtäminen ja käsittely

Riitta Kinnunen

Oppimistutkimuksen keskus, Turun yliopisto

Yksilölliset tekijät:

Esim.

Havaintovalmiudet, aivotoiminta

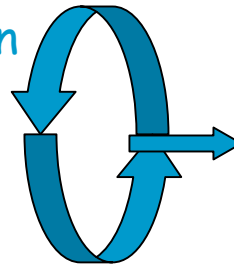
Tarkkaavaisuus, keskittyminen

Työmuistin kapasiteetti

Kielellinen taso

Persoonallisuus

Motivaatio



Matemaattisloogisten taitojen kehitys

Tyypillinen kulku

Poikkeava kulku

Ympäristön kehitystä ohjaavat tekijät

Esim.

Fyysinen ympäristö

Sosiaalinen vuorovaikutus

Arkitoimet ja leikit

Opetus

Matemaattisten valmiuksien varhainen kehitys

Havaintovalmiudet

- valmius havaita eroja pienissä määrissä
- valmius havaita 1-3 setti
- valmius havaita suhteellisia eroja määrissä

- suuntautuneisuus toiminnoissa ja leikeissä
- poikkeavuudet voivat vaikuttaa kehitykseen

Matemaattis-loogisen ajattelun perustaa (vrt. Piaget)

- Esim.
- määrien säilyvyys
 - transitiivinen päättely
 - luokkainkluusio

Spontaanit aritmeettiset operaatiot

- monia, paljon, vähän
- enemmän, vähemmän, yhtä paljon
- saada lisää, ottaa pois, jää jäljelle



Lukujen ymmärtämisen ja käsittelyn kehittymisessä on monta tasoa

1. Lukusanojen ja "lukusanaloron" oppiminen

- "yksikaksikolmeneljäviisikuusi..." tai "ykskakskolnelviiskuus.."
- "yksi" "kaksi" "kolme" "neljä" "viisi" "kuusi"...

2. Lukujonon käyttäminen esineiden määrän selvittämiseen

- "yksi" "kaksi" "kolme" "neljä" "viisi" ...viimeksi sanottu on vastaus
- osoittaa sormella esineitä "epätahdissa"
- osoittaa sormella esineitä yhtä kerrallaan
- joutuu aloittamaan lukusanajonon aina alusta

3. Lukujonon käyttäminen karttuvan määrän laskemiseen

- ["kolme"]..."neljä" "viisi" "kuusi" ... viimeinen luku on vastaus
- osaa jatkaa laskemista keskeltä lukujonoa
- osaa käyttää tuota taitoa esineitä lisättäessä



4. Lukujono suuruusjärjestyksessä olevien lukujen jonona

- yksi < kaksi < kolme < neljä < viisi < kuusi...
- lukusanat ovat suuruusjärjestyksessä
- numerot edustavat lukusanoja
- kymmenjärjestelmän laajentaminen: päätteet "-toista", "kymmentä"
- laskeminen lukujonoa eteenpäin tai taaksepäin kulkemalla

5. Lukujonon ymmärtäminen lukumäärien jonona

- $1 < 2 < 3 < 4 < 5 < 6$, niin että seuraavassa on aina yksi enemmän
- esim. luku 3 on kolmas jonossa, mutta se on myös lukumäärä 3
- jokainen jonon lukumäärä voidaan osittaa ja koota pienemmistä, esim. luvussa 3 on 1 ja 1 ja 1 tai 1 ja 2
- laskeminen osittamalla ja kokoamalla lukumääriä

(vrt. Karen Fuson, 1992)



Lukujen tuntemisessa on monta aspektia

- Lukusanan sanominen
- Esinemäärät tai sarjat havainnon kohteena
- Numeromerkit visuaalisen havainnon kohteena
- Numeron ja lukusanan yhdistäminen
- Numeron kirjoittaminen itse
- Numeron nimen hakeminen muistista
- Numeron määrään viittaavan merkityksen tunteminen
 - (esim. esineiden määrä, sormiyhdistelmät)
- Numeron paikka lukusuoralla
- Luvut ja sen numerot (esim. 24, 56, 3467)
- Lukujen järjestyksen määräytyminen lukusuoralla
- Luku lukumääränä, joka voidaan koota/hajottaa pienemmistä



Luonnollisten lukujen ymmärtäminen

Lukusanojen jono

- *loru*
- *esine-lukusana vastaavuus*
- *pienten määrien tunnistaminen*
- *esineiden määrän laskeminen*
- *karttuvan määrän laskeminen*
- *järjestys toistuvien kymmenin*

Lukujen jono järjestyksessä

- *lukusana-numero (0-9...)*
- *järjestys toistuvien kymmenin*
- *laskeminen lukujonossa liikkumista*

Lukumäärien jono

- *lukujen järjestys määrän perusteella*
- *laskeminen lukumäärien käsittelyä
(luvut ositettavissa ja koottavissa)*



Kehittymätön lukujen ymmärtäminen johtaa matematiikan oppimisvaikeuksiin

- > Laskemisen hitaus
- > Sormien käyttö lukusuoran tuottamisen apuna
- > Vaikeus ymmärtää ja oppia uusia strategioita



Esimerkki: $27 + 5$ (pitkä strategia sormilla)

Sanoo ääneen:

1. "Kakskytseitsemän plus viis"
2. "27..28..29..hm.....30..31"
3. "Vastaus on 31!"

Toimii:

- Katsoo toisen käden sormia.
- Laskee sormen kerrallaan.
- Päättyy virheelliseen tulokseen, koska aloitti 27:stä



Esimerkki: $17 + 5$ (Kehittyneempää sormien käyttöä)

Sanoo ääneen:

1. "Kymmenen..kaksikymmentä"
2. "Seitsemän"
3. "Plus viisi!"
4. "Kolmekymmentä"
5. "ja kaksi....kolmekymmentäkaksi"

Toimii:

Ojentaa kaksi kertaa kaikki sormet

Ojentaa kerralla 7 sormea.

Ojentaa loput kolme sormea ja toisesta kädestä kaksi

Katsoo kolmea ja kahta sormeaan



Kehittymätön lukujen ymmärtäminen johtaa matematiikan oppimisvaikeuksiin

- > Laskemisen hitaus
- > Sormien käyttö lukusuoran tuottamisen apuna
- > Vaikeus ymmärtää ja oppia uusia strategioita
- > Samanlaisena toistuvat virheet allekkain laskuissa

Oppilas 1: "Vähennä suuremmasta aina pienempi."

$$\begin{array}{r} 510 \\ - 238 \\ \hline 328 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 352 \\ - 146 \\ \hline 214 \end{array}$$

Oppilas 2: "Kun nollasta vähennetään saadaan nolla"

$$\begin{array}{r} 406 \\ - 243 \\ \hline 203 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 411 \\ 510 \\ - 238 \\ \hline 280 \end{array}$$

Oppilas 3: "Pienemmästä ei voi vähentää. Siitä tulee nolla."

$$\begin{array}{r} 510 \\ - 238 \\ \hline 300 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 244 \\ - 156 \\ \hline 100 \end{array}$$

Oppilas 4: "Lainataan sen verran, kun tarvitaan."

$$\begin{array}{r} 44 \\ 85 \\ - 19 \\ \hline 30 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 81 \\ 197 \\ - 78 \\ \hline 110 \end{array}$$

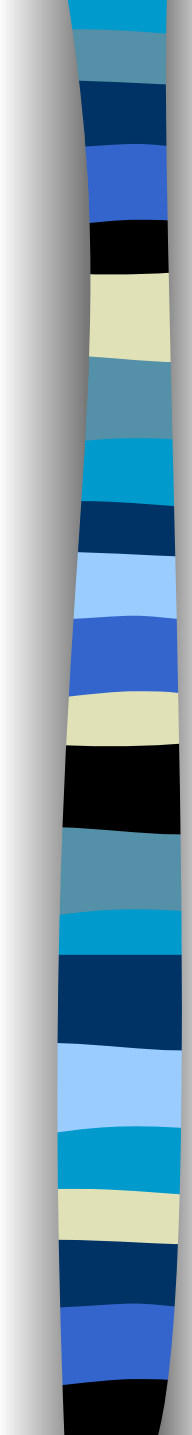


Kehittymätön lukujen ymmärtäminen johtaa matematiikan oppimisvaikeuksiin

- Laskemisen hitaus
- Sormien käyttö lukusuoran tuottamisen apuna
- Vaikeus ymmärtää ja oppia uusia strategioita
- Samanlaisena toistuvat virheet allekkain laskuissa
- Vaikeus oppia muistamaan kertotaulut
- Lukujen määrällinen ymmärtäminen vaikeaa

Lukujen määrällisen koostumuksen ymmärtäminen

1. 1-10 alueella hyvin opitut kokoonpanot
 - $1+9, 2+8, 3+7, 4+6, 5+5$ (= 10)
 - $2+3, 3+4, 4+5$
 - $2+2, 3+3, 4+4$
 - $1+$ tai $1-$ on helppo
2. Näiden suhteiden siirtyminen kymmenten käsittelyyn
 - $10+90, 20+80$ (yksi 10 ja yhdeksän 10:tä)
 - $20+30, 30+40$
 - $20+20, 30+30$...
 - 10 lisää tai 10 pois on helppo
3. 10-100 alueella lukujen koostumuksen ymmärtäminen
 - $27+24 = 10+10+7+10+10+4$
 - $56+14 = 50+10+10$
4. Tämän ymmärryksen strateginen käyttö
 - $35+13=45+3=48$ tai $40+8=48$ tai $43+5=48$

- 
5. Edellä opitun soveltaminen satoihin ja tuhansiin
 - 100 on kymmenen kymmentä
 - 1000 on kymmenen sataa
 - $300+200=500$ (3 sataa + 2 sataa)
 - $2000+5000=7000$ (2 tuhatta + 5 tuhatta)
 - $2052+23=2000+50+20+2+3$
 - $345+200=300+200+40+5$

 6. Kertotaulujen koostuminen määrällisesti
 - 4 kertaa 3= $3+3+3+3$
 - 9 kertaa 7=ei kymmenen seitsemää, vaan yksi vähemmän
 - askelittain laskeminen mielessä

 7. Mittayksiköiden ymmärtäminen
 - Raha: Eurot ja sentit (sadan koostumus)
 - Kello: Kellotaulun ja digitaalisen näytön yhteys 24 tunnin vuorokauteen ja 60 minuutin tuntiin ja 60 sekunnin minuuttiin.
 - kilo, deka, hehto vs desi, sentti, milli
 - desimaalit eli kymmenes-, sadas- ja tuhannesosat



Kehittymätön lukujen ymmärtäminen johtaa matematiikan oppimisvaikeuksiin

- Laskemisen hitaus
- Sormien käyttö lukusuoran tuottamisen apuna
- Vaikeus ymmärtää ja oppia uusia strategioita
- Samanlaisena toistuvat virheet allekkain laskuissa
- Vaikeus oppia muistamaan kertotaulut
- Lukujen määrällinen ymmärtäminen vaikeaa
- Murtolukujen supistaminen ja laventaminen ei onnistu
- Mittayksikköjen ymmärtäminen ja käsittely on vaikeaa
- Desimaalilukujen ymmärtäminen ja käsittely on vaikeaa

- Pinnalliset strategiat (ongelmien ratkaiseminen, oppiminen)
- Kielteinen asenne matematiikkaan
- Kasvavat vaikeudet seurata opetusta muun luokan tahdissa



Aritmeettiset taidot 1. luokalla suhteessa lukujonotaitojen kehitykseen

Lukujonotaitojen kehitys	Lukujonotaitojen taso koulutulokkaana		
	HE	KT	HY
Ei kehitystä tai hieman	2.90	4.61	6.21
Voimakasta kehitystä	4.52	5.72	*



Miten opettaja voi arvioida lukujen ymmärtämisen ja käytön tasoa?

Kriteeritehtäviä:

- Matemaattislooginen ajattelu
- Mihin asti osaat laskea?
- Laske 1:stä eteenpäin.
- Laske 1:stä 50:een.
- Laske luvusta eteenpäin/taaksepäin.
- Laske eteenpäin/taaksepäin luvusta lukuun.
- Laske askelittain eteenpäin/taaksepäin.
- Laske eteenpäin/taaksepäin 10, 20, 50, 100, 200, 500 kerrallaan.
- Kuinka monta esinettä tässä on?
- Osita ja kokoa (luvuilla 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2).
- Osita ja kokoa (10-9999 lukualueella).
- Yhteen- ja vähennyslaskujen strategiat (esim. pitkä tai lyhyt)
- Keskeisten mittayksiköiden ymmärtäminen

Ajattelutapojen selvittäminen haastattelemalla

"Kerro, miten ajattelit/lasket?"

"Ajattele ääneen, kun suunnittelet ja lasket."

"Piirrä kuva siitä, miten ajattelit."

Laske päässä kuinka monta kymmentä voit ottaa luvusta 146? Kerro sitten, miten lasket?

Oppilas 1 kertoo: *"Vastaus on 4. Siin on 4 kymmentä. Tässä on kymmenten paikalla 4."*

Oppilas 2 kertoo: *"Vastaus on 14. Ensin on tuo 100, jossa on 10 kymmentä ja sitten on nuo 4 eli 14."*



Esimerkkitehtäviä:

1. Laske päässä paljonko on $700+40+9$. Kerro, miten laskit?
2. Laske päässä paljonko on $50+20+7$. Kerro, miten laskit?
3. Laske päässä paljonko on $643-20$. Kerro, miten laskit?
4. Laske päässä paljonko on $859-40-2$. Kerro, miten laskit?
5. Laske päässä paljonko on $745+200+30+3$. Kerro, miten laskit?
6. Laske päässä paljonko on $433+14+7$. Kerro, miten laskit?
7. Laske päässä paljonko on $238-8-38$. Kerro, miten laskit?



Laske päässä $37+8$. Kerro sitten, miten ajattelit.

Vastaus: 45

Oppilas 1 kertoo (pitkä strategia):

*"Lisäsin nämä kahdeksan (näyttää sormia). 38..39..40..41..42..
43..44..45."*

Oppilas 2 kertoo (lyhyt strategia):

"Lisään ensin kahdeksasta kolme, niin saan tasan 40. Siihen on helppo lisätä loput viisi."

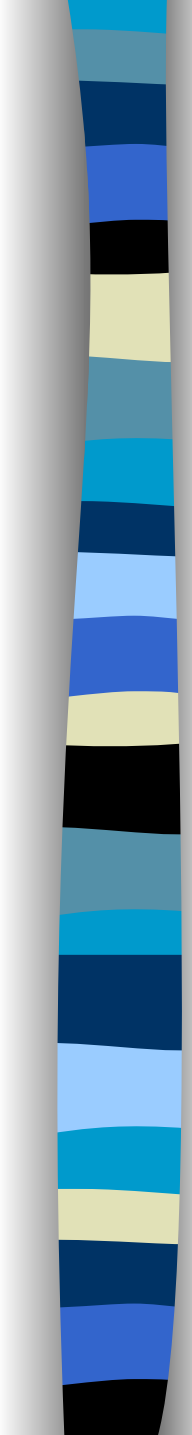
TAI

"Siinä on 30. Seitsemän plus kahdeksan on 15. 30 plus 15 on 45."

TAI

"37 plus kymmenen on 47. Siinä on kaksi liikaa, koska piti lisätä vain

kahdeksan. Otetaan ne pois ja tulee 45."



Sinulla on 85 senttiä rahaa 5 sentin kolikkoina. Laske päässä, montako kolikkoa siinä on? Kerro sitten, miten laskit.

Oppilas kertoo: *"Vastaus on 17. Viisi menee kahdeksaan yhden kerran. Jää 3. Viisi menee 35:een 7 kertaa. Siis 17."*

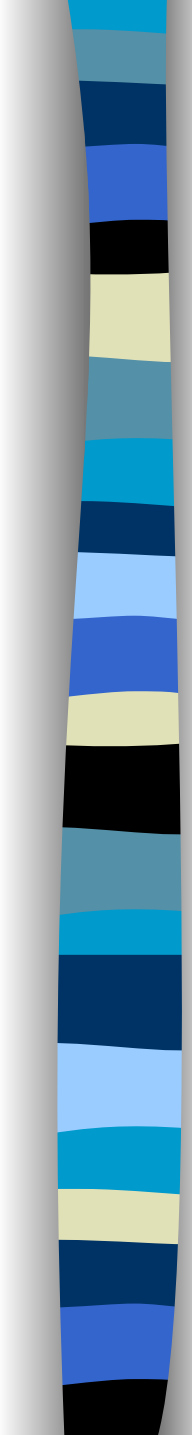
Opettaja: *"Teit siitä jakolaskun. Kerro, voitko päätellä vastauksen muulla tavalla."*

Oppilas kertoo: *"Joo. Kaksi viiden sentin kolikkoa on aina kymmenen. Jokaisessa kahdeksassa kymmenessä on kaksi eli se tekee 16 ja sitt on tuo yksi...17."*



Ajattelutapojen selvittäminen virheitä tutkimalla

- Systemaattiset virheet menettelytavoissa
 - Esim. samanlaisina toistuvat virheet allekkain vähennettäessä
- Ajatteluvirheet versus laskuvirheet
 - Esim. Jakolasku jakokulmassa muutoin oikein, mutta yhden kertotauluvirheen takia tulos väärin
- Huolimattomuusvirheet
 - Esim. luku muuttuu kopioitaessa paikasta toiseen
- Pinnallisten strategioiden käyttö
 - Esim. allekkain kertolaskussa "yksi mustattu ruutu"



Millaisin keinoin opettaja voi edistää oppilaiden lukujenkäsittelytaitoja?

Muutama tärkeä periaate opetuksen suunnittelun tueksi

- motivoiva oppimisympäristö, jossa harjoittelu on hauskaa ja mielekästä
- opetuksen on kohdistuttava taitohierarkiassa oikein
- opetuksen sisällön on oltava oppilaan kannalta sopivan haasteellista
- opetusvuorovaikutus, jossa myös itsesäätelytaidot voivat kehittyä
- taitojen rakentumiseen tarvitaan työaika



Ymmärtäminen versus harjoittelu

- Ymmärrystä tukeva opetus

- Esim.
- havainto- ja kokeilumateriaalit
 - todelliset toimintaympäristöt
 - käsitteellinen tieto ($2 \times 6 = 6 + 6$)
 - ajattelun "näkyväksi tekeminen"

- Mielessä tehtävien operaatioiden nopeuden ja joustavuuden lisääminen (muististahaku ja vahvistaminen)

Esim. harjoitussarjat erilaisin tehtävin

- Näille rakentuvien kokemusten ja mielikuvien käyttö uudenlaisten näkökulmien kehittämisessä ja uusien asioiden opettelussa

- Esim. laskuoperaatiosta itsestään tulee ajattelun kohde
- summa ei ole vain tulos, vaan sitä voi edustaa myös lauseke
 - kirjain voi olla numeron (muuttujan) edustaja



Keskeisiä taitoalueita lukujenkäsittelyssä

- Lukusuoran ja kymmenjärjestelmän hallinnan vahvistaminen
 - lukusuoran rakentaminen ja tuottaminen erilaisin keinoin
 - lukusuoran käyttö leikeissä ja peleissä
- Ajatuksellinen liikkuminen lukujonossa
 - lukujonotaidot eteenpäin ja taaksepäin, alusta, keskeltä ja askelittain sekä toiminnallisesti että ajatuksissa
- Lukujen määrällisen merkityksen aktivoiminen
 - esinemäärien käsittely, lukujen osittaminen ja kokoaminen
 - pienellä lukualueella parikit
 - suuremmilla lukualueilla paikkajärjestelän ymmärtäminen
- Osittamisen ja koonnan strateginen käyttö
 - kymmenten ylitykset ja alitukset
- Ongelmien ratkaiseminen ja strategisuus
 - joustavuutta ratkaisemistapoihin



Uusien strategioiden opettaminen

1. Tee ensin strategia "näkyväksi" monin erilaisin keinoin.
2. Auta ja tue oppilasta, kun hän yrittää toteuttaa strategiaa itse.
3. Tee harjoituksia oppilaan kanssa ja vähennä tukeasi vähitellen.
4. Anna sitten oppilaan harjoitella itsenäisesti.
5. Keskustelkaa strategiasta ja miettikää, onko muita mahdollisia strategioita ratkaista tehtävä.



Muutama nyrkkisääntö opettajalle:

1. Puutu havaitsemiisi oppimisen vaikeuksiin heti.
 - Tutki oppilaan lukujen käsittelyn taso:
 - Lukusanajono vai lukumäärien jono?
2. Harkitse, mihin taitoihin kannattaa panostaa.
 - Jos lukumäärien ymmärrys puuttuu, suuntaa opetus siihen ja vasta myöhemmin sitä edellyttäviin taitoihin
 - Yritä sovittaa opetus oppilaan lukujen ymmärtämisen tasoon, muuten oppilas tukeutuu pinnallisiin strategioihin
3. Vältä opettamasta pinnallisia strategioita.
 - Älä anna nyrkkisääntöjä, joissa ei ole matemaattista sisältöä.
 - Älä anna merkitsemistapojen ja oppikirjan mallien hallita opetusta, vaan ohjaa ymmärtämiseen ja strategisuuteen



4. Opeta ongelmanratkaisua ja uusia strategioita.

- Tutki oppilaiden kanssa erilaisia vaihtoehtoja laskea
- Auta oppilaita ottamaan käyttöön parempia strategioita

5. Lisää yhteistä pohdintaa ja ajattelun "näkyväksi" tekemistä

- Vähennä omaa selittämistä ja lisää mahdollisuutta oppilaiden omien kysymysten ja ajatusten ilmituloon
- Käytä erilaisia ajattelun "näkyväksi" tekemisen keinoja
 - ääneen ajattelu, piirtäminen, ratkaisujen perustelu, määriä ja operaatioita havainnollistavat välineet